

ISSN 1817-7204 (Print)
ISSN 1817-7239 (Online)

ЗЕМЛЯРОБСТВА І РАСЛІНАВОДСТВА AGRICULTURE AND PLANT CULTIVATION

УДК 633.63:631.559:519.8
<https://doi.org/10.29235/1817-7204-2025-63-1-7-22>

Поступила в редакцию 23.08.2024
Received 23.08.2024

А. П. Лихацевич¹, А. В. Малышко², И. А. Романов³, С. В. Набздоров³

¹*Институт мелиорации, Национальная академия Республики Беларусь, Минск, Республика Беларусь*

²*Опытная научная станция по сахарной свекле, Несвиж, Республика Беларусь*

³*Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, Горки, Республика Беларусь*

МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОЖАЙНОСТИ САХАРНОЙ СВЕКЛЫ

Аннотация. Математическое моделирование урожайности сельскохозяйственных культур базируется на физическом принципе баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе (causal interaction). Определены условия верификации модели, позволяющие получать объективные и достоверные выводы. Отмечено, что эмпирические уравнения, представляющие зависимость урожайности от урожаяформирующих факторов в виде полиномов любой степени, полученные методом множественной нелинейной регрессии, справедливы только для условий конкретного полевого опыта. С их использованием невозможно проводить теоретические обобщения, позволяющие развить эти частные решения до обобщенной математической модели. Показано, что математическая модель урожайности, представленная в мультипликативной форме, может включать неограниченное число урожаяформирующих факторов. В качестве фактора, характеризующего влагообеспеченность растений при отсутствии орошения, использованы атмосферные осадки. Справедливость разработанного решения подтверждена 13-летними данными урожайности сахарной свеклы (гибрид NZ-тип), возделываемой в Беларуси в ГСХУ «Молодечненская сортоиспытательная станция». Математическая модель урожайности представлена в безразмерной форме, все блоки сомножителей данной модели являются критериями подобия. Это позволяет сравнивать между собой результаты математического моделирования урожайности любой сельскохозяйственной культуры на почвах с любыми агрохимическими свойствами. Подобный анализ невозможно проводить с результатами расчета урожайности по формулам частных математических моделей урожайности сельскохозяйственных культур в виде алгебраических полиномов.

Ключевые слова: урожайность, агрохимические показатели почвы, атмосферные осадки, температуры воздуха, опорные показатели математической модели урожайности

Для цитирования: Моделирование урожайности сахарной свеклы / А. П. Лихацевич, А. В. Малышко, И. А. Романов, С. В. Набздоров // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя аграрных навук. – 2025. – Т. 63, № 1. – С. 7–22. <https://doi.org/10.29235/1817-7204-2025-63-1-7-22>

Anatoly P. Likhatshevich¹, Anatoly V. Malyshko², Ilya A. Romanov³, Sergey V. Nabzdorov³

¹*Institute of Land Reclamation, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

²*Experimental Scientific Station for Sugar Beet, Nesvizh, Republic of Belarus*

³*Belarusian State Agricultural Academy, Gorki, Republic of Belarus*

SIMULATION OF SUGAR BEET YIELD

Abstract. Mathematical simulation of agricultural crop yields is based on the physical principle of causal interactions balance in a closed physical system. The conditions for model verification are determined, allowing to obtain objective and reliable findings. It is noted that empirical equations representing the dependence of crop yields on crop-forming factors in the form of polynomials of any degree, obtained using the multiple nonlinear regression method, are valid only for the conditions of a specific field experiment. Using them, it is impossible to carry out theoretical generalizations that would allow developing these particular solutions into a generalized mathematical model. It is shown that mathematical model of yield, presented in multiplicative form, can include an unlimited number of yield-forming factors. Atmospheric precipitation was used as a factor characterizing the moisture supply for plants in case of no irrigation. The validity of the developed solution is confirmed by 13 years of data on the yield of sugar beet (NZ-type hybrid) cultivated in Belarus at the State Agricultural Institution “Molodechno Variety Testing Station”. The mathematical model of yield is presented in dimensionless form; all blocks of factors of this model are similarity criteria. This allows to compare the results of mathematical simulation of yield of any

agricultural crop on soils with any agrochemical properties. Such an analysis cannot be carried out with the results of calculating yields using the formulas of private mathematical models of agricultural crop yields in the form of algebraic polynomials.

Keywords: yield, agrochemical parameters of soil, atmospheric precipitation, air temperature, reference indicators of the mathematical model of yield

For citation: Likhatchevich A. P., Malyshko A. V., Romanov I. A., Nabzdorov S. V. Simulation of sugar beet yield. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya agrarnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Agrarian series*, 2025, vol. 63, no. 1, pp. 7–22 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1817-7204-2025-63-1-7-22>

Введение. Для расчета урожайностей сельскохозяйственных культур в настоящее время предложено множество эмпирических формул [1–9 и др.]. Из них можно выделить наиболее обоснованные расчетные зависимости в виде алгебраических полиномов, полученных с использованием стандартного математического инструмента – метода множественной нелинейной регрессии с включением в анализ различных нелинейных преобразований аргументов. Например, подобное частное решение предложено в Российской Федерации для расчета урожайности моркови при капельном орошении [9]:

$$Y = a + bh + cN + dh^2 + eN^2 + fhN, \quad (1)$$

где Y – урожайность, т/га; a, b, c, d, e, f – численные эмпирические коэффициенты (без указания размерности), полученные по опытным данным; h – глубина промачивания почвы капельным поливом, м; N – доза внесения минерального азота, как лимитирующего элемента плодородия почвы, кг д. в/га.

По результатам полевых исследований автором (1) подобраны численные значения эмпирических коэффициентов (a, b, c, d, e, f), разные для двух вариантов распределения посевного материала в посевной ленте (С1 – равномерного, С2 – с увеличением на 10 % в крайних строках и снижением на 10 % по центру ленты) (табл. 1) [9].

Таблица 1. Параметры поверхности отклика уравнения (1)

Table 1. Response surface parameters of equation (1)

Способ посева	a	b	c	d	e	f	Коэффициент детерминации
С1	-226,19	412,22	2,08	-521,11	-0,004	0,11	0,94
С2	-201,10	331,78	2,04	-469,44	-0,004	0,29	0,95

Следует отметить, что предлагаемые для расчета урожайности эмпирические уравнения вида (1) могут учесть не более трех урожаеформирующих факторов [1–9]. Причем для учета третьего фактора привлекается таблица с конкретными численными показателями (см. табл. 1), поскольку математическое выражение вида (1) с тремя аргументами существенно усложняется и малоприспособно для практического использования.

Обычно не обращается внимания на то, что численные значения эмпирических коэффициентов в алгебраических полиномах, предлагаемых для расчета урожайности сельскохозяйственных культур, зависят от неучтенных факторов, например, от физических и агрохимических характеристик почвы. На почвах с другими показателями плодородия значения эмпирических коэффициентов (a, b, c, d, e, f) в (1) будут другими. По этой причине на основе подобных эмпирических формул, справедливых только для тех условий, в которых они получены, невозможно проводить какие-либо обобщения, позволяющие развить частные решения вида (1) до обобщенной математической модели урожайности сельскохозяйственных культур.

Необходимо отметить, что в аграрных исследованиях в последние годы появилось множество эмпирических формул, в алгоритмах построения которых отсутствует уравнивание размерностей физических величин. Например, в используемом для количественного описания зависимости урожайности сельскохозяйственных культур от урожаеформирующих факторов методе множественной нелинейной регрессии (как и в математической теории планирования эксперимента) требование уравнивания размерностей не только не является обязательным, но и вообще отсутствует. Оценивая подобный подход, некоторые исследователи считают, что при любом ко-

эфектыўнае дэтэрмінацыі такія эмпірычныя ўраўненні не з'яўляюцца сапраўды дзейснымі мадэлямі даследуемага працэса, паколькі не маюць фізічнага сэнса, а прадстаўляюць сабой толькі формальнае матэматычнае сглажыванне даных канкрэтных эксперыментаў. Выкарыстоўваць гэтыя эмпірычныя формулы можна толькі ў межах канкрэтнага вопыту (участка, поля), дзе атрыманы пачатковыя даныя для аналізу [10, 11]. Аднак з улікам таго, што ў цяперашняе час у аграрна-тэхналагічнай навуцы не завяршана фарміраванне тэрміналогіі ў вобласці матэматычнага мадэлявання, падаем, што сувязь уражайнасці сельскагаспадарчых культур з уражаефарміруючымі фактарамі, прадстаўляемую ў выглядзе алгебраічных поліномаў, не маючых так называемага фізічнага сэнса, усё ж можна называць частковымі матэматычнымі мадэлямі. Хоць відавочна, што такія частковыя (агрэганаваныя прымяненні) мадэлі [1–9], збудаваныя без апракты на агульныя фізічныя законы, не могуць знайсці шырокага практычнага прымянення, паколькі не прыгодны для разробкі абагульненых інфармацыйных сістэм кіравання такімі-лібы працэсамі.

Выкарыстанне вядомай матэматычнай тэорыі планавання эксперымента для лічэнага апісання ўзаемадзействаў у сістэме «фактары асяродка жыцця раслін – уражайнасць» таксама наталківаецца на непраходзімыя цяжкасці пры спробах ўліку ўздзеяння на расліны не толькі тэхногенных кіраваных, але і прыродных некідраваных фактараў з непрадказуемай дынамікай [12, 13].

Следвае адзначыць, што ў гісторыі развіцця аграрнай навуцы ёсць прыклады матэматычнага мадэлявання з выкарыстаннем дыферэнцыяльных ураўненняў (з улічэннем памернасцей уваходзячых у іх паказатэляў) для паступова разлічываемага прыроста уражайнасці культуры ў працэсе вегетацыі. Адна з першых мадэляў была прапанавана акадэмікам ВАСХНІЛ С. Ф. Авер'яновым і яго вучнем В. В. Шабановым у 1973 г. [14]. У 1977 г. апублікавана мадэль фарміравання уражая, збудаваная на аснове тэорыі энерга- і масаабмену расліннага супольнасця з асяродкам. У аснове мадэлі беларускі вучны Г. І. Афанасік выкарыставаў вядомае суадношэнне паміж паглынненнем раслінным углекислого газу з паветра ў працэсе фотасінтэза і прыростам агульнай біомасы [15]. У 2007 г. ў якасці мадэлі уражайнасці прафэсарам Л. В. Кіраевай і яе вучнем А. В. Ромка (Російская Федэрацыя) выкарыстана залежнасць, у якой развіццё раслін задаецца праз індэкс лісцовай паверхнасці, вышыню раслін і глыбіню каранёвага шара (як лінейныя па часе функцыі фаз развіцця раслін) [16]. Аднак усё прыведзенае вышэй метады разліку уражайнасці не знайшлі якога-лібы практычнага прымянення.

Вядомы таксама варыянты абагульненых матэматычных мадэляў уражайнасці, у якіх адсутнічае неабходнасць ўліку дынамічнасці ўмоў знешняга асяродка ў часе вегетацыі. К іх ліку можна аднесці формулу прафэсара В. А. Попова, апублікаваную ў 1997 г. [17]. У 1990 г. ў справочным зборніку [18] апублікавана некалькі формул, збудаваных з улікам балансу памернасцей і прызначаных для ўліку ўплыву фактараў жыцця раслін на іх уражайнасць без ўліку фактара часу. Разам з тым прапанаваныя аўтарамі [17, 18] да цяперашняга часу таксама ігнаруюцца пры статыстычнай апрацоўцы вопытных даных. Об гэтым сведчаюць больш познія працы, зробленыя ў гэтай вобласці даследаванняў [1–9]. Прычына, на наш погляд, складаецца ў складанасці адаптацыі метадык [14–18] да канкрэтных умоў.

Разам з тым відавочна, што актуальнасць разробкі інфармацыйных сістэм падтрымкі кіравання аграрнымі тэхналогіямі, якія ўлічваюць ўплыв асяродка жыцця раслін на іх уражайнасць, ў умовах набліжэння сельскагаспадарчага прадукцыі да лічэвых сістэм земляробства пастаянна павялічваецца. Для вырашэння гэтай насаднай праблемы, пераду ўсё, неабходна вызначыць і навукова абаснаваць алгарытм разробкі абагульненай матэматычнай мадэлі, справядлівай для любых умоў і прадстаўляючай залежнасць уражайнасці сельскагаспадарчых культур ад уражаефарміруючых фактараў.

Трабаванні да матэматычнага мадэлявання. Праведзем аналіз тэрміналогіі, прынятай у матэматычным мадэляванні даследуемых працэсаў. Згодна вызначэнню, прыведзенаму ў Логічным слоўніку-справочніку, матэматычная мадэль прадстаўляе сабой «...аб'ект ў выглядзе логіка-матэматычных знакавых формул... які адлюстроўвае і рэпрадукуе струк-

туру, свойства взаимосвязи и отношения между элементами исследуемого объекта...» [19, с. 360–361]. В Математическом энциклопедическом словаре отмечено, что первый этап математического моделирования состоит в «...*формулировании законов*, связывающих основные объекты модели... Этап завершается записью в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели» [20, с. 343]. В Мелиоративной энциклопедии дается разъяснение: «...математическая модель явления или процесса обычно создается на основании применения к ним *наиболее общих законов*». И далее раскрываются преимущества подобного подхода к моделированию: «...записывая эти законы в виде систем *дифференциальных уравнений* и аналитически исследуя их, можно получить информацию о процессах или явлениях, которые не наблюдались в природе или наблюдались в ограниченном диапазоне изменения исследуемых величин» [21, с. 183]. Таким образом, согласно [20, 21], математическое моделирование следует начинать с поиска (установления) общих законов, представленных дифференциальными уравнениями.

В Физическом энциклопедическом словаре находим пояснение академика А. М. Колмогорова: «...если исследуемые явления изучаются при помощи дифференциальных уравнений, то определяющие параметры появляются 1) в виде величин, входящих в начальные и граничные условия; 2) в виде коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения. После приведения уравнений к безразмерному виду в них остаются лишь безразмерные коэффициенты (соотношения), которые являются *критериями подобия*» [22, с. 559].

Из всего сказанного можем сделать вывод, что математическое моделирование, в строгом научном понимании, следует базировать на двух столпах – *теории подобия* и *анализе размерностей* [22, с. 426], что поднимает его до уровня физического моделирования. Выполнение указанных требований, относящихся как к теоретическому, так и к эмпирическому моделированию, позволяет разрабатывать наиболее общие математические модели, охватывающие весь спектр факторов, влияющих на изучаемые процессы.

На основании полученных выводов при обобщении требований к математическому моделированию можно сформулировать общее определение: *обобщенная математическая модель объекта исследований – это математическое выражение, построенное с соблюдением баланса размерностей, содержательно отражающее свойства изучаемого объекта и количественные связи, его характеризующие. Каждый элемент математической модели, включая численные коэффициенты, должен иметь объяснимое физическое содержание.*

Исходя из данного определения, можем утверждать, что методику математического моделирования в аграрной науке, включая моделирование урожайности сельскохозяйственных культур, необходимо поднять на качественно новый уровень, приблизив к требованиям физического моделирования. Первым шагом на этом пути является разработка алгоритма моделирования, опирающегося на теорию подобия и анализ размерностей физических величин, доступного исследователям-аграриям и способного привести к эффективному научному и практическому результату.

Построение математической модели урожайности сельскохозяйственных культур. Исходя из требования обязательной опоры математического моделирования объекта исследований на относящийся к данному объекту общий физический закон, используем в качестве методологической основы моделирования урожайности физический принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе (causal interaction) [23].

Формальным выражением физического принципа баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе применительно к модели урожайности (в полном соответствии с разъяснениями Мелиоративной энциклопедии [21, с. 183]) является дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial Y}{\partial F_i} = \alpha_i f_i \left(\frac{Y}{F_i} \right) \frac{g_i(F_i)}{h_i(F_{i(\text{extr})}}), \quad (2)$$

где $\partial Y / \partial F_i$ – частная производная урожайности (Y) по i -му урожаеформирующему фактору (F_i), соответствующая интенсивности изменения Y при изменении F_i , при условии, что другие факто-

ры (аргументы функции) не изменяются; Y – урожайность; F_i – обобщенное представление i -го фактора; α_i – безразмерный коэффициент, характеризующий восприимчивость урожая к действию i -го фактора; $f_i(Y/F_i)$ – функция, характеризующая реакцию урожайности на влияние i -го фактора в пределах рассматриваемого диапазона его воздействия; $g_i(F_i)$ – функция, характеризующая величину стресса растений при отклонении i -го фактора (F_i) от оптимального уровня ($F_{i(\text{opt})}$); $h_i(F_{i(\text{extr})})$ – функция, характеризующая экстремальный стресс от воздействия i -го фактора, приводящий к потере урожая.

Наиболее сложным и ответственным действием в предлагаемой схеме математического моделирования является установление вида функций $f_i(Y/F_i)$, $g_i(F_i)$ и $h_i(F_{i(\text{extr})})$. При этом требуется соблюдение следующих условий: *необходимым условием* является полное соответствие предлагаемых зависимостей физическим закономерностям, установленным в опытах; *достаточное условие* состоит в обязательном соблюдении баланса размерностей всех показателей, входящих в функции $f_i(Y/F_i)$, $g_i(F_i)$ и $h_i(F_{i(\text{extr})})$. Кроме того, вводим дополнительное условие, которое состоит в исключении «человеческого фактора»: определение количественных значений входящих в уравнение (2) параметров (урожайность и урожаеформирующие факторы) должно выполняться в строгом соответствии с установленными методиками без вмешательства «личного интереса», подгонок и фальсификаций.

В соответствии с представленным выше *необходимым условием* при построении модели урожайности в системе «урожаеформирующие факторы среды (аргументы) – урожайность (функция)» следует учитывать известные законы земледелия и установленные опытным путем закономерности, которые являются граничными условиями моделирования. Основные из них изложены в многочисленной литературе [24–29]. Выделим следующие закономерности:

1) при отклонении урожаеформирующего фактора от оптимального значения в любую сторону (к минимуму или к максимуму) растения испытывают стресс, который снижает урожайность;

2) величина отклонений фактических значений факторов среды от их оптимума определяет величину стресса, испытываемого растениями при формировании урожайности;

3) с приближением условий среды (значений урожаеформирующих факторов) к оптимуму прирост урожайности замедляется;

4) если условия среды (урожаеформирующие факторы) находятся в оптимуме, то растения образуют максимум урожайности;

5) урожаеформирующие факторы равноценны по влиянию на растения и не могут заменять друг друга;

6) наибольшее влияние на снижение урожая оказывает фактор, находящийся в минимуме (закон минимума).

Исходя из отмеченных граничных условий, упростим задачу и будем рассматривать только интересующие нас области функций $f_i(Y/F_i)$, $g_i(F_i)$ и $h_i(F_{i(\text{extr})})$. Например, при направленном регулировании пищевого режима наиболее предпочтительно построение модели в области с повышением доз вносимых удобрений от минимума до оптимального уровня, а при регулировании водного режима растений следует отдельно анализировать области либо снижения влагообеспеченности от максимума до оптимума (при ликвидации переувлажнения), либо ее целенаправленного повышения от минимума до оптимума (в засушливых условиях).

Соблюдая *достаточное условие*, в первом приближении можем представить составные элементы математического выражения (2), формализующего принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в системе «урожаеформирующие факторы среды (причина) – урожайность (следствие)», в виде простейших эмпирических зависимостей

$$f_i\left(\frac{Y}{F_i}\right) = \frac{Y_{\max}}{F_{i(\text{opt})} - F_{i(0)}}, \quad (3)$$

$$g_i(F_i) = F_{i(\text{opt})} - F_i, \quad (4)$$

$$h_i(F_{i(\text{extr})}) = F_{i(\text{opt})} - F_{i(0)}, \quad (5)$$

где Y – урожайность культуры; $F_{i(\text{opt})}$ – оптимальный уровень i -го фактора, при котором урожайность достигает своего максимума (Y_{max}); $F_{i(0)}$ – уровень i -го фактора, при котором урожай перестает формироваться.

Дифференциальное уравнение (2) с учетом зависимостей (3)–(5) приводится к виду

$$\frac{\partial Y}{\partial F_i} = a_i Y_{\text{max}} \frac{F_{i(\text{opt})} - F_i}{(F_{i(\text{opt})} - F_{i(0)})^2}. \quad (6)$$

С учетом второй части формулировки физического принципа «causal interaction» – «каждый из факторов, действующих на Y , сообщает ему такое же изменение, как если бы других факторов не было» – решение (6) получим в виде мультипликативной функции, которая и будет являться простейшей математической моделью урожайности:

$$\frac{Y}{Y_{\text{max}[n]}} = \prod_{i=1}^n \left[1 - a_i \left(\frac{F_{i(\text{opt})} - F_i}{F_{i(\text{opt})} - F_{i(0)}} \right)^2 \right], \quad (7)$$

где n – количество учитываемых в математической модели урожайности факторов; $Y_{\text{max}[n]}$ – максимальная урожайность культуры, приближающаяся к биологически потенциальной при $n \rightarrow \infty$.

Представим в общем виде формулу (7), учитывающую влияние на урожайность n факторов:

$$\frac{Y}{Y_{\text{max}[n]}} = \left[1 - a_1 \left(\frac{F_{1(\text{opt})} - F_1}{F_{1(\text{opt})} - F_{1(0)}} \right)^2 \right] \left[1 - a_2 \left(\frac{F_{2(\text{opt})} - F_2}{F_{2(\text{opt})} - F_{2(0)}} \right)^2 \right] \dots \left[1 - a_n \left(\frac{F_{n(\text{opt})} - F_n}{F_{n(\text{opt})} - F_{n(0)}} \right)^2 \right], \quad (8)$$

где Y – фактическая урожайность; a_1, a_2, a_n – коэффициенты, характеризующие степень влияния на урожайность 1-го, 2-го, ..., n -го урожаяформирующих факторов, соответственно (безразмерные величины); $F_{1(\text{opt})}, F_{2(\text{opt})}, \dots, F_{n(\text{opt})}$ – оптимальные количества 1-го, 2-го, ..., n -го урожаяформирующих факторов соответственно, при которых достигается максимум урожайности; $F_{1(0)}, F_{2(0)}, \dots, F_{n(0)}$ – количества 1-го, 2-го, ..., n -го урожаяформирующих факторов соответственно, при которых урожай не формируется.

Анализ структуры формулы (8) показывает, что она не только отвечает требованиям математического моделирования, но и учитывает приведенные выше закономерности, которые являются граничными условиями моделирования.

Опорные показатели предложенной математической модели урожайности ($Y_{\text{max}}, a_1, a_2, \dots, a_n, F_{1(\text{opt})}, F_{2(\text{opt})}, \dots, F_{n(\text{opt})}, F_{1(0)}, F_{2(0)}, \dots, F_{n(0)}$) устанавливаются в процессе вычислений по (8) с использованием метода последовательных приближений с ориентацией на минимизацию среднеквадратических (стандартных) отклонений урожайностей, вычисленных ($Y_{\text{расч}}$) по (8), от урожайностей, измеренных (Y) в поле. В принципе, здесь можно использовать разные показатели, например, суммы или среднеарифметические значения абсолютных величин этих отклонений, а также другие статистические характеристики, но, на наш взгляд, наиболее показательным является использование среднеквадратических (стандартных) отклонений урожайностей, вычисленных по (8), от урожайностей, измеренных в поле. Сравнение результатов расчета при разных значениях опорных показателей модели (8) проводится до получения минимального значения среднеквадратического (стандартного) отклонения

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{j=N} (\Delta Y_j)^2}{N-1}} \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\Delta Y_j = Y_{\text{расч},j} - Y_j, \quad (10)$$

где δ – среднеквадратическое отклонение урожайностей, вычисленных по формуле (8), от урожайностей, замеренных в поле, за каждый (j -й) год из N участвующих в расчете лет; ΔY_j – откло-

нение урожайности, вычисленной по формуле (8) в условиях j -го года, от урожайности, измеренной в поле в j -м году; $Y_{\text{расч},j}$ – урожайность, вычисленная по формуле (8) для условий j -го года; Y_j – фактическая урожайность, полученная в поле в условиях j -го года; j – порядковый номер года в многолетии; N – количество лет исследований в многолетнем ряду.

Результаты и их обсуждение. Справедливость формулы (8) проверим с использованием данных сортоиспытаний сахарной свеклы (гибрид NZ-тип), полученных на Молодечненской государственной сельскохозяйственной сортоиспытательной станции (ГСХУ «Молодечненская СС»). В табл. 2 приведены результаты исследований 13-летней продолжительности (2011–2023 гг.).

В исходной информации (см. табл. 2), помимо урожайности сахарной свеклы, присутствуют 7 урожаеформирующих факторов: рН, гумус (G), K_2O , P_2O_5 , NPK, среднесуточные температуры воздуха (t) и атмосферные осадки (S), которые являются показателями тепло- и влагообеспеченности растений [30]. Заметим, что атмосферные осадки, как характеристика влагообеспеченности растений, являются весьма приближенным показателем, поскольку значительная часть обильных осадков может теряться на непродуктивный сброс (например, в табл. 2 это май 2014 г., июль 2016 и 2018 гг. и др.). Данный выбор показателя является вынужденным при отсутствии контроля за динамикой влажности почвы.

Таблица 2. Исходные данные моделирования урожайности сахарной свеклы (ГСХУ «Молодечненская СС»)

Table 2. Initial data for simulating sugar beet yield (State Agricultural Institution “Molodechno Variety Testing Station”)

Год	Урожай т/га	Агрохимические показатели почвы				Внесено				Атмосферные осадки, сумма за месяц, мм				Среднесуточные температуры воздуха, среденные за месяц, °С			
		рН	Гумус	P_2O_5	K_2O	N	P	K	NPK	V	VI	VII	VIII	V	VI	VII	VIII
		–	%	мг/кг		кг д. в/га				V	VI	VII	VIII	V	VI	VII	VIII
2011	80,2	5,82	3,62	335	350	136	90	120	346	57	85	119	101	13,5	18,6	19,6	17,6
2012	56,4	5,76	3,45	319	334	120	90	90	300	58	92	44	52	14,4	15,3	20,4	16,8
2013	61,4	5,78	3,53	321	321	130	90	120	340	105	83	85	56	16,4	18,8	18,2	18,0
2014	63,9	5,80	3,6	325	321	130	90	120	340	149	47	28	92	13,9	15,1	20,8	18,4
2015	35,6	5,75	3,40	319	314	120	90	90	300	97	47	94	15	12,0	16,6	17,4	20,3
2016	63,4	5,76	3,58	322	321	130	90	120	340	14	62	194	107	15,1	18,2	18,5	17,6
2017	62,1	5,75	3,55	324	321	130	90	120	340	15	105	119	74	12,9	15,6	17,0	18,3
2018	67,1	5,80	3,62	325	321	130	90	120	340	16	30	156	45	17,0	17,5	19,3	19,4
2019	61,2	5,78	3,62	320	324	130	90	120	340	63	20	113	71	17,2	25,1	20,2	22,3
2020	54,3	5,75	3,55	320	314	120	90	90	300	80	127	52	28	13,8	23,4	21,6	22,8
2021	46,8	5,83	3,55	320	314	120	90	90	300	106	56	32	119	11,0	18,5	21,0	16,0
2022	68,4	6,12	3,62	315	325	120	90	180	390	21	103	111	107	9,0	16,0	20,0	16,0
2023	47,3	6,30	3,40	310	320	120	90	180	390	6	25	89	84	13,6	18,1	18,4	20,5

Согласно приведенным численным значениям агрохимических показателей (см. табл. 2) почвы под сахарной свеклой на Молодечненской сортоиспытательной станции относятся к высокоплодородным дерново-подзолистым, легкосуглинистым, развивающимся на лессовидных суглинках, подстилаемых мореной, с высоким содержанием гумуса, калия и фосфора. Соответствует данным показателям и достаточно высокая урожайность, полученная в среднем за 2011–2023 гг. Вместе с тем по годам наблюдались значительные колебания урожайности сахарной свеклы – от 35,6 в 2015 г. до 80,2 т/га в 2011, т. е. более чем в два раза. Очевидно, что при должном соблюдении требований агротехники данные колебания вызваны только изменением агрохимических характеристик почвы и метеословий.

На первом качественном этапе анализа сравним полученную урожайность сахарной свеклы с агрохимическими показателями почвы. Как видим, наиболее высокая урожайность получена

в 2011 г. на фоне повышенного содержания в почве гумуса и калия при внесении более высокой дозы азота. Причина наименьшей урожайности сахарной свеклы в 2015 г. обусловлена наиболее низкими значениями этих показателей (см. табл. 2).

Следующий этап анализа состоит в оценке количественных зависимостей урожайности сахарной свеклы от агрохимических показателей почвы, температур воздуха и выпавших атмосферных осадков (рис. 1). Как видим, влияние каждого отдельно взятого показателя на урожайность различно. Оказалось, что в почвах ГСХУ «Молодечненская СС» при очень высоком содержании гумуса (G колеблется от 3,4 до 3,8 %) урожайность сахарной свеклы наиболее зависима именно от его наличия в почве (см. рис. 1). Затем по важности для культуры располагается содержание в почве K_2O . В то же время прямое влияние на урожайность таких показателей, как P_2O_5 , NPK, среднесуточных температур воздуха (t) и выпавших атмосферных осадков (S), согласно рис. 1, можно условно назвать несущественным. Тот же вывод относится и к кислотности почвы (график связи с урожайностью на рис. 1 опущен с целью сокращения объема рисунка).

Вместе с тем, как показывают результаты расчетов по (8), при совместном учете влияние каждого из перечисленных факторов на урожайность сахарной свеклы весьма значимо. Об этом свидетельствуют данные табл. 3, в которой приведены полученные методом подбора по схеме (9), (10) опорные показатели математической модели урожайности (8). Причем, согласно данным таблицы, численные значения опорных показателей математической модели почти не зависят от

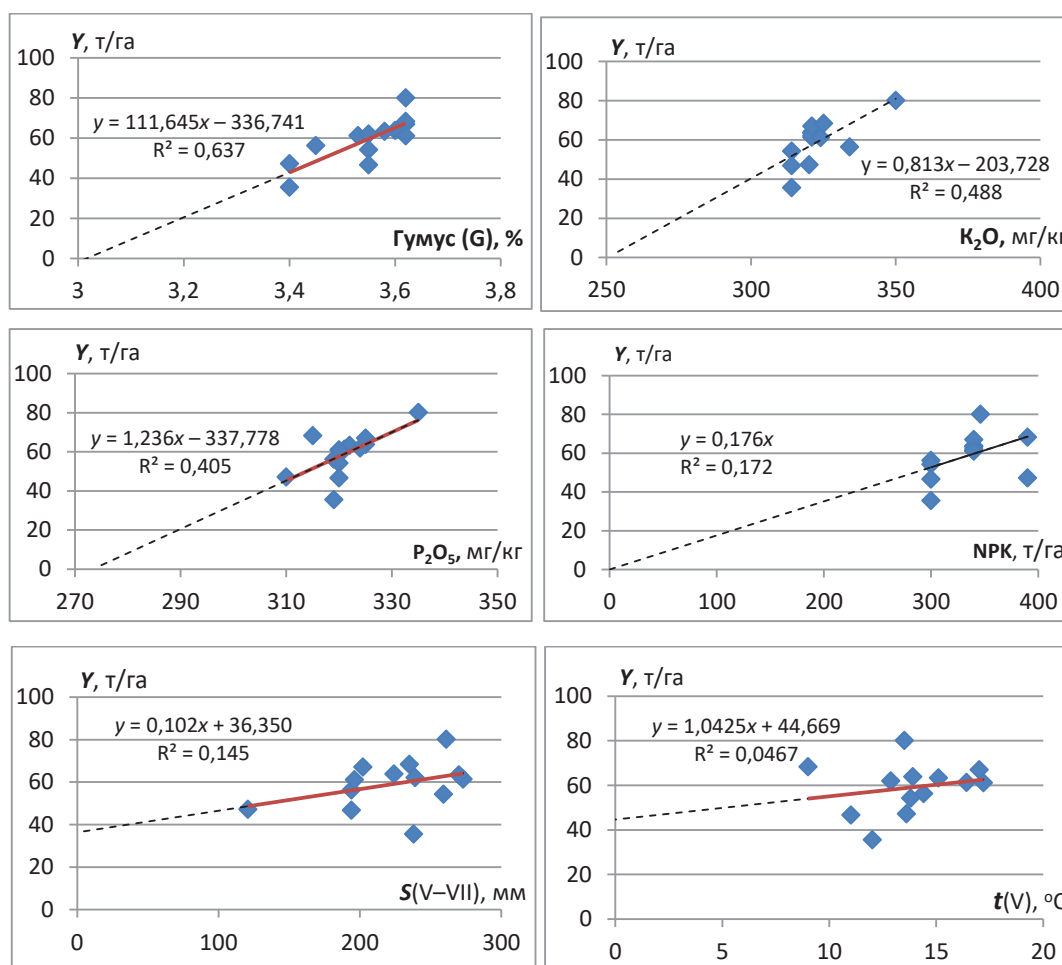


Рис. 1. Связь фактической урожайности сахарной свеклы в ГСХУ «Молодечненская СС» с агрохимическими показателями почвы, атмосферными осадками и температурой воздуха

Fig. 1. Correlation between actual yield of sugar beet at the State Agricultural Institution “Molodechno Variety Testing Station” and agrochemical parameters of soil, precipitation and air temperature

состава и количества учитываемых факторов. Имеют место незначительные изменения опорных характеристик доз вносимых удобрений, содержания в почве фосфора и метеоусловий.

Результаты расчетов, выполненных по схеме (8)–(10), показали, что на Молодечненской сортоиспытательной станции наиболее ответственным (критическим) периодом при оценке теплообеспеченности сахарной свеклы является май, а наиболее ответственным (критическим) периодом при оценке влагообеспеченности сахарной свеклы являются месяцы с мая по июль включительно.

Отметим, что расстояние от метеопоста, на котором контролировались температуры воздуха и атмосферные осадки, до полей со свеклой составляло в среднем около 4 км. Известно, что изменение температурного фона по территории не столь велико, как распределение атмосферных осадков. Выпадающие на участки с сахарной свеклой осадки не всегда соответствовали их количеству, замеренному на метеопосту, хотя суммирование суточных величин атмосферных осадков за несколько месяцев несколько снижало расхождение между их суммами, полученными по данным метеопоста и выпавшими на поле с сахарной свеклой. Исходя из этого несоответствия следовало ожидать, что коэффициенты a_s и a_t в формуле (8), характеризующие влияние на урожайность сахарной свеклы атмосферных осадков и температур воздуха, измеренных на некотором расстоянии от участков с сахарной свеклой, будут меньше единицы.

Действительно, безразмерный коэффициент, характеризующий восприимчивость урожая к действию атмосферных осадков, выпавших за май – июль, согласно данным табл. 2 изменяется от 0,20 до 0,29. Это означает, что данный показатель влияет на результат вычислений в пределах 20–29 % (по указанным выше причинам). То же замечание можно отнести и к действию средне-суточной температуры воздуха за май, которая по своему воздействию на урожайность сахарной свеклы (a_t изменяется в пределах 0,64–0,87), что более чем в два раза превышает влияние влагообеспеченности на формирование урожайности культуры.

Перечень опорных показателей урожаяформирующих факторов в табл. 3 (сверху вниз) приведен в строгом соответствии с их значимостью по влиянию на урожайность сахарной свеклы. Иерархию их влияния, начиная от главного фактора и завершая наименее значимым (оценка выполнена по снижению среднеквадратического отклонения (δ) и росту коэффициента детерминации (R^2) в строках 23 и 24 табл. 3), можно представить последовательностью, иллюстрируемой диаграммой на рис. 2:

$$G \rightarrow K_2O \rightarrow NPK \rightarrow t(V) \rightarrow S(V-VII) \rightarrow pH \rightarrow P_2O_5. \quad (11)$$

Данные табл. 3 и рис. 2 дают много важной информации для объективной оценки влияния урожаяформирующих факторов на урожайность сахарной свеклы. Во-первых, согласно представленным результатам расчета математическая модель урожайности сельскохозяйственных культур (8), применительно к сахарной свекле, не уступает частным математическим моделям [1–9] по точности и превосходит их по количеству учитываемых урожаяформирующих факторов. Во-вторых, показателен факт повышения тесноты связи с ростом числа факторов, учитываемых при расчете урожайности (при учете второго фактора наблюдается скачок R^2 от 0,576 до 0,905). При учете третьего фактора R^2 повышается до 0,933. Согласно данным табл. 3, четвертым фактором по важности для сахарной свеклы является средняя за май температура воздуха, а пятым – сумма атмосферных осадков за май – июль включительно. Учет пяти урожаяобразующих факторов (G , K_2O , NPK , $t(V)$, $S(V-VII)$) повышает точность расчета урожайности сахарной свеклы до $R^2 = 0,960$. Таким образом, первая пятерка важнейших урожаяобразующих факторов для сахарной свеклы выстраивается вполне однозначно:

$$G \rightarrow K_2O \rightarrow NPK \rightarrow t(V) \rightarrow S(V-VII). \quad (12)$$

Дополнительный учет влияния на урожайность сахарной свеклы кислотности почвы pH и содержания в ней P_2O_5 примерно одинаково по значимости при повышении R^2 до 0,960–0,961. Учет семи факторов (G , K_2O , NPK , $t(VI)$, $S(V-VII)$, pH , P_2O_5) повышает коэффициент детерминации до $R^2 = 0,964$ (см. рис. 3, табл. 3). Важно отметить, что при включении в математическую модель (8) показателей погодных условий при последовательном росте коэффициента детерминации среднеквадратическое отклонение весьма существенно снижается (от 2,70–2,80 т/га до $\delta = 2,15$ т/га).

Таблица 3. Опорные показатели математической модели урожайности (8) по данным ГСХУ «Молодечненская СС»

Table 3. Key indicators of the mathematical model of crop yield (8) based on data of State Agricultural Institution «Molodechno Variety Testing Station»

№ п/п	Наименование показателей	G	G, K ₂ O	G, K ₂ O, NPK	G, K ₂ O, NPK, P ₂ O ₅	G, K ₂ O, NPK, t(V)	G, K ₂ O, NPK, t(VI), S(V–VII)	G, K ₂ O, NPK, t(VI), S(V–VII), pH	G, K ₂ O, NPK, t(V), S(V–VII), pH, P ₂ O ₅
1	2	3	4	5	6	7	8	9	–
1	Y_{\max} , т/га	69,3	82,8	87,1	92,1	91,8	93,8	95,7	99,0
2	a_G	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
3	$G_{(opt)}$, %	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
4	$G_{(0)}$, %	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1
5	a_{K_2O}	–	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
6	$K_2O_{(opt)}$, мг/кг	–	350	350	350	350	350	350	350
7	$K_2O_{(0)}$, мг/кг	–	280	280	280	280	280	280	280
8	a_{NPK}	–	–	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
9	$NPK_{(opt)}$, кг д. в/га	–	–	430	440	440	440	440	440
10	$NPK_{(0)}$, кг д. в/га	–	–	0	20	70	70	70	50
11	a_t	–	–	–	–	0,65	0,64	0,71	0,87
12	$t(V)_{(opt)}$, мм	–	–	–	–	14,0	14,1	14,3	14,4
13	$t(V)_{(0)}$, мм	–	–	–	–	0	0	0	5,2
14	a_s	–	–	–	–	–	0,20	0,22	0,29
15	$S(V–VII)_{(opt)}$, мм	–	–	–	–	–	330	330	330
16	$S(V–VII)_{(0)}$, мм	–	–	–	–	–	0	0	0
17	a_{pH}	–	–	–	–	–	–	1,00	1,00
18	$pH_{(opt)}$	–	–	–	–	–	–	6,2	6,2
19	$pH_{(0)}$	–	–	–	–	–	–	3,1	4,3
20	$a_{P_2O_5}$	–	–	–	1,00	–	–	–	1,00
21	$P_2O_5_{(opt)}$, мг/кг	–	–	–	350	–	–	–	320
22	$P_2O_5_{(0)}$, мг/кг	–	–	–	210	–	–	–	210
23	δ , т/га	7,348	3,485	2,807	2,702	2,533	2,271	2,236	2,147
24	R^2	0,576	0,905	0,933	0,943	0,950	0,960	0,961	0,964
25	$\delta/Y(\min)$, %	20,6	9,8	7,9	7,6	7,1	6,4	6,3	6,0
26	$\delta/Y(\text{cp})$, %	12,2	5,8	4,7	4,5	4,2	3,8	3,7	3,6
27	$\delta/Y(\max)$, %	9,2	4,3	3,5	3,4	3,2	2,8	2,8	2,7

В целом с увеличением числа учитываемых в расчете урожаяформирующих факторов ошибка вычислений, представленная отношением среднеквадратических отклонений (δ) к граничным значениям полученной фактической урожайности (от Y_{\min} до Y_{\max}), снижается от 4,3–9,8 до 2,7–6,0 % (см. стр. 25–27 табл. 3). Полученные результаты свидетельствуют о достаточно высокой точности математической модели урожайности (8), верификация которой выполнена для сахарной свеклы по данным ГСХУ «Молодечненская СС».

В соответствии с данными табл. 3, рис. 2 и 3 можем утверждать, что для предварительного прогноза урожайности сахарной свеклы с использованием математической модели (8) на высокоплодородных легкосуглинистых почвах с реакцией среды, близкой к нейтральной, с высоким содержанием гумуса, калия и фосфора можно ограничиться учетом четырех достаточно легко контролируемых в сельскохозяйственном производстве урожаяформирующих факторов (6-й стб. табл. 3):

$$G \rightarrow K_2O \rightarrow NPK \rightarrow P_2O_5. \quad (13)$$

При учете основных агрохимических характеристик почвы и суммарной дозы внесения минеральных удобрений (G, K₂O, P₂O₅, NPK) ожидаемое значение коэффициента детерминации при расчете урожайности сахарной свеклы по (8) составляет около 0,94 при среднеквадратическом отклонении $\delta = 2,70$ т/га, что удовлетворяет практическим требованиям к точности математического моделирования, результаты которого можно успешно использовать в разработке информационных систем поддержки принятия решений при управлении системой земледелия в конкретном регионе.

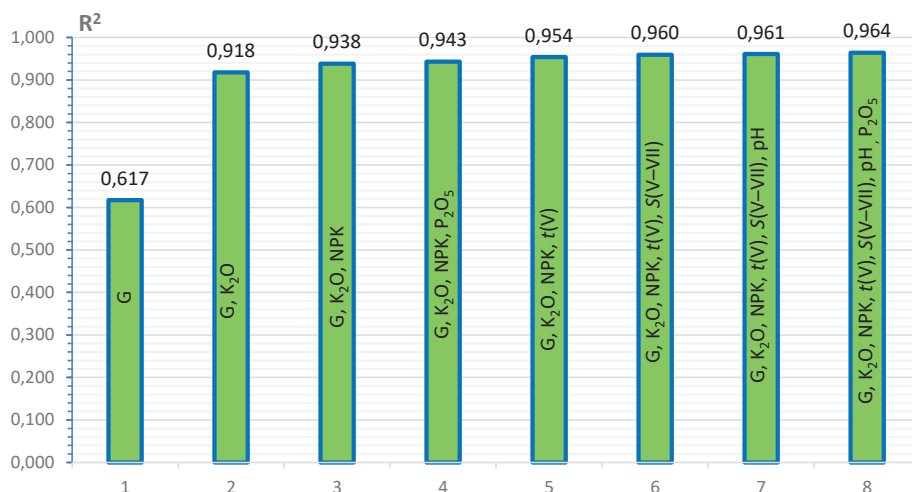


Рис. 2. Диаграмма изменения тесноты связи между измеренной в поле урожайностью и урожайностью сахарной свеклы, рассчитанной по формуле (8), с повышением количества учитываемых урожаеформирующих факторов (по данным ГСХУ «Молодечненская СС»)

Fig. 2. Diagram of change in the correlation ratio between the yield measured in the field and the yield of sugar beet calculated using formula (8) with increase in the number of yield-forming factors taken into account (based on data of the State Agricultural Institution “Molodechno Variety Testing Station”)

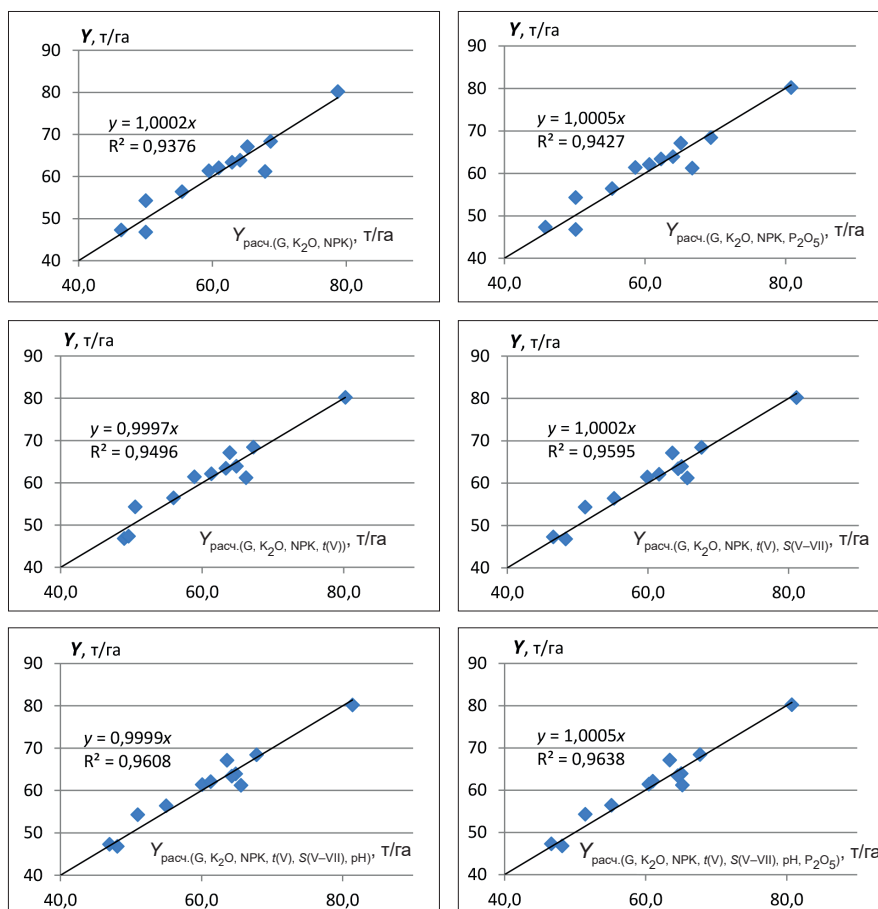


Рис. 3. Графики связи между вычисленной по опорным показателям (табл. 3) математической модели (8) и измеренной в поле урожайностью сахарной свеклы в ГСХУ «Молодечненская СС»

Fig. 3. Graphs of correlation between sugar beet yield calculated using the reference indicators (Table 3) of the mathematical model (8) and the yield measured in the field at the State Agricultural Institution “Molodechno Variety Testing Station”

Основываясь на данном выводе, прогнозную математическую модель урожайности (8), учитывающую только важнейшие агрохимические характеристики почвы и вносимые минеральные удобрения, можно представить по опорным показателям (6-й стб. табл. 3 при $a_G = a_{K_2O} = a_{NPK} = a_{P_2O_5} = 1,00$) формулой, которая определяет положение 5-мерной поверхности отклика функции урожайности на агрохимические показатели почвы и вносимые удобрения (гумус, K_2O , NPK, P_2O_5):

$$\frac{Y}{Y_{\max[4]}} = \left[1 - \left(\frac{G_{(opt)} - G}{G_{(opt)} - G_{(0)}} \right)^2 \right] \times \left[1 - \left(\frac{K_2O_{(opt)} - K_2O}{K_2O_{(opt)} - K_2O_{(0)}} \right)^2 \right] \times \left[1 - \left(\frac{NPK_{(opt)} - NPK}{NPK_{(opt)} - NPK_{(0)}} \right)^2 \right] \times \left[1 - \left(\frac{P_2O_5_{(opt)} - P_2O_5}{P_2O_5_{(opt)} - P_2O_5_{(0)}} \right)^2 \right]. \tag{14}$$

Отметим, что при среднеквадратических отклонениях, изменяющихся в пределах от $\delta = 7,0$ т/га до $\delta = 2,0$ т/га, при росте коэффициента детерминации по горизонтальной оси от $R^2 = 0,60$ до $R^2 = 0,97$ данные табл. 3 демонстрируют практически функциональную связь между R^2 и δ (рис. 4). Ожидаемое минимальное значение среднеквадратического отклонения при $R^2 \rightarrow 1$ приближается к 1,13 т/га. Эта величина сравнима с ошибкой при проведении учета урожайности по стандартной методике (например, НСР₀₁).

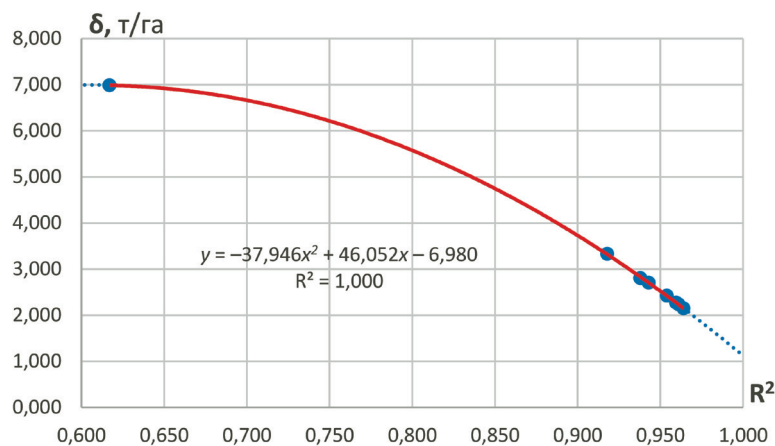


Рис. 4. График связи среднеквадратичных отклонений с коэффициентами детерминации, полученными при сравнении вычисленных и измеренных урожайностей сахарной свеклы в ГСХУ «Молодечненская СС»

Fig. 4. Graph of correlation between standard deviations and determination coefficients obtained by comparing calculated and measured sugar beet yields at the State Agricultural Institution “Molodechno Variety Testing Station”

Таблица 4. Граничные значения урожайности и урожаяформирующих факторов, используемых в расчете по (14) (допустимый интервал варьирования)

Table 4. Boundary values of yield and yield-forming factors used in the calculation according to (14) (permissible range of variation)

Показатели	Y, т/га	Агрохимические показатели почвы			NPK, кг д. в./га	Среднесуточная температура, °С	Сумма атмосферных осадков за период, мм	
		G, %	K ₂ O, мг/кг	P ₂ O ₅ , мг/кг				
Границы варьирования	min	35,6	3,40	314	310	300	9,0	121
	max	80,2	3,62	350	335	390	17,2	273
Основной уровень		57,9	3,51	332	332,5	345	13,1	197
Интервал варьирования		22,3	0,11	10	12,5	45	4,1	76
Допустимые границы изменения показателей урожаяформирующих факторов при расчете по (8), (14)	min	24,5	3,35	310	304	278	7,0	83
	max	91,4	3,68	340	341	413	19,3	311

Следует подчеркнуть, что математическая модель (8), (14) хотя и базируется на теоретической основе (2), но получена с привлечением эмпирических зависимостей (3)–(5), поэтому ее следует считать полуэмпирической. В таком случае результаты расчета будут справедливы в ограниченной области значений урожаяформирующих факторов и урожайности. Для определения границ этой области используем методику, рекомендуемую при планировании эксперимента [13]. Результаты расчета представлены в табл. 4.

Заключение. Результаты полевых сортоиспытаний сахарной свеклы (гибрид NZ-тип) продолжительностью 13 лет (2011–2023 гг.), полученные в ГСХУ «Молодечненская СС», наглядно подтверждают справедливость предложенной обобщенной математической модели урожайности сельскохозяйственных культур. Поскольку данная модель является полуэмпирической, в расчетах по формулам (8), (14) следует учитывать не только опорные показатели математической модели (табл. 2), но и граничные значения урожайностей и урожаяформирующих факторов (допустимый интервал их варьирования), приведенные в табл. 4. Статистические характеристики модели (8) и ее упрощенного варианта (14) зависят от объема выборки, а допустимый интервал варьирования урожайностей и численных значений каждого фактора определяется пределами их колебаний за многолетие (табл. 2, 4).

Урожайность сахарной свеклы, возделываемой в условиях Молодечненской сортоиспытательной станции, можно прогнозировать с точностью $R^2 = 0,94$ в начале вегетационного периода по известным агрохимическим показателям почвы и вносимым удобрениям (гумус, K_2O , NPK, P_2O_5). При этом результат расчета будет ориентировочно получен со среднеквадратическим отклонением значений прогнозируемой урожайности от фактической около $\pm 2,7$ т/га, что составляет 3–8 % от фактических урожайностей сахарной свеклы, полученных в ГСХУ «Молодечненская СС» в 2011–2023 гг. (см. табл. 3).

Поскольку предложенная математическая модель урожайности состоит из блоков, представленных в безразмерной форме, то согласно разъяснению академика А. М. Колмогорова [22, с. 559] блоки модели, относящиеся к каждому урожаяформирующему фактору, являются критериями подобия. Это позволяет сравнивать между собой результаты математического моделирования урожайности любой сельскохозяйственной культуры на почвах с любыми агрохимическими свойствами, делая при этом вполне обоснованные выводы. Заметим, что такой анализ невозможно проводить с результатами расчета урожайности по формулам частных математических моделей урожайности сельскохозяйственных культур [1–9].

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Сельскохозяйственные технологии и продовольственная безопасность» на 2021–2025 годы, подпрограмма «Плодородие почв и защита растений», задание 1.31 «Разработка шкалы оценки земельного риска возделывания сахарной свеклы в условиях Беларуси с учетом агрохимических свойств почв и влагообеспеченности вегетационных периодов».

Acknowledgments. The study was carried out within the framework of the State Scientific Research Program “Agricultural Technologies and Food Security” for 2021–2025, subprogram “Soil Fertility and Plant Protection” under task 1.31 “Development of a scale for assessing the agricultural risk of cultivating sugar beets in the conditions of Belarus, taking into account the agrochemical properties of soils and moisture availability during vegetation periods”.

Список использованных источников

1. Урожайность сладкого перца при капельном орошении / А. С. Овчинников, О. В. Бочарникова, Т. В. Пантюшина, Е. В. Шенцева // Мелиорация и водное хозяйство. – 2007. – № 2. – С. 45–47.
2. Акулинина, М. А. Капельное орошение огурца в сухостепной зоне светло-каштановых почв Нижнего Поволжья: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук: 06.01.02 / Акулинина Марина Александровна; Волгогр. гос. с.-х. акад. – Волгоград, 2010. – 23 с.
3. Шенцева, Е. В. Совершенствование агротехники выращивания баклажан при капельном орошении с использованием тоннельных укрытий для получения ранней продукции: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук: 06.01.01; 06.01.02 / Шенцева Екатерина Викторовна; Саратов. гос. аграр. ун-т. – Саратов, 2012. – 23 с.
4. Богданенко, М. П. Технология возделывания рассадного лука при капельном орошении в Нижнем Поволжье: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук: 06.01.01; 06.01.02 / Богданенко Максим Павлович; Саратов. гос. аграр. ун-т. – Саратов, 2012. – 24 с.
5. Степуро, М. Ф. Использование методов математического моделирования при оценке систем удобрений и оптимизации минерального питания капусты / М. Ф. Степуро, Л. М. Панифедова // Земляробства і ахова раслін. – 2012. – № 3. – С. 34–37.

6. Степуро, М. Ф. Применение методов математического моделирования при оценке систем удобрений и оптимизации минерального питания моркови столовой / М. Ф. Степуро // Земляробства і ахова раслін. – 2012. – № 4. – С. 59–62.
7. Степуро, М. Ф. Научное обоснование агроприемов в интенсивных технологиях возделывания овощных культур в условиях Беларуси: автореф. дис. ... д-ра с.-х. наук: 06.01.08 / Степуро Мечеслав Францевич; НАН Беларуси, Науч.-практ. центр НАН Беларуси по земледелию, Ин-т овощеводства. – Жодино, 2013. – 51 с.
8. Малоинтенсивное дождевание столовой моркови / Н. Н. Дубенок, А. С. Овчинников, А. А. Мартынова, С. А. Дусарь; под общ. ред. Н. Н. Дубенка. – М.: Проспект, 2022. – 208 с.
9. Пенькова, Р. И. Ресурсосберегающие технологии возделывания моркови при капельном орошении в условиях Нижнего Поволжья: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук: 4.1.5 / Пенькова Раиса Ивановна; Волгогр. гос. аграр. ун-т. – Волгоград, 2023. – 20 с.
10. Вахонин, Н. К. Концептуальные основы моделирования урожайности в системе принятия решений по регулированию водного режима / Н. К. Вахонин // Мелиорация. – 2014. – № 2 (72). – С. 7–15.
11. Вахонин, Н. К. Моделирование урожая в системе точного земледелия / Н. К. Вахонин // Мелиорация. – 2015. – № 1 (73). – С. 131–136.
12. Красовский, Г. И. Планирование эксперимента / Г. И. Красовский, Г. Ф. Филаретов. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1982. – 303 с.
13. Кане, М. М. Анализ исходных данных при статистической обработке результатов научных исследований / М. М. Кане. – Минск: Выш. шк., 2024. – 118 с.
14. Аверьянов, С. Ф. Некоторые математические модели системы «растение – среда» / С. Ф. Аверьянов, В. В. Шабанов // Физическое и математическое моделирование в мелиорации: науч. тр. / Всесоюз. акад. с.-х. наук им. В. И. Ленина, Отд-ние гидротехники и мелиорации; под ред. С. Ф. Аверьянова. – М., 1973. – С. 293–295.
15. Афанасик, Г. И. Моделирование процесса формирования урожая сельскохозяйственных культур / Г. И. Афанасик // Мелиорация торфяников и их сельскохозяйственное использование: сб. ст. / М-во мелиорации и вод. хоз-ва СССР, Белорус. науч.-исслед. ин-т мелиорации и вод. хоз-ва; редкол.: В. Ф. Карловский (отв. ред.) [и др.]. – Минск, 1977. – Вып. 3. – С. 122–127.
16. Ромко, А. В. Обоснование водного и питательного режима мелиорируемых земель гумидной зоны с использованием интегрированной модели агрогеосистемы: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 06.01.02 / Ромко Алексей Викторович; Моск. гос. ун-т природообустройства. – М., 2007. – 26 с.
17. Попов, В. А. Математическое выражение закона лимитирующего фактора и его приложение к задачам мелиоративного земледелия / В. А. Попов // Мелиорация и водное хозяйство. – 1997. – № 2. – С. 30–34.
18. Механизация полива: справочник / Б. Г. Штепа, В. Ф. Носенко, Н. В. Винникова [и др.]. – М.: Агропромиздат, 1990. – 336 с.
19. Кондаков, Н. И. Логический словарь-справочник / Н. И. Кондаков; отв. ред. Д. П. Горский. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1976. – 720 с.
20. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. – М.: Совет. энцикл., 1988. – 847 с.
21. Мелиоративная энциклопедия: в 3 т. / М-во сел. хоз-ва Рос. Федерации; гл. ред. А. В. Колганов; сост. Б. С. Маслов. – М.: Росинформагротех, 2004. – Т. 2: К – П. – 444 с.
22. Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Совет. энцикл., 1984. – 944 с.
23. Лихацевич, А. П. Использование физического принципа для построения экспериментальных математических моделей исследуемых процессов в мелиоративной науке / А. П. Лихацевич // Мелиорация и водное хозяйство. – 2021. – № 6. – С. 30–36. <https://doi.org/10.32962/0235-2524-2021-6-30-36>
24. Земледелие: учебник / С. А. Воробьев, А. Н. Каштанов, А. М. Лыков, И. П. Макаров; под ред. С. А. Воробьева, Е. М. Козинной. – М.: Агропромиздат, 1991. – 572 с.
25. Кирюшин, В. И. Экологические основы земледелия / В. И. Кирюшин; ред. А. А. Белоусова. – М.: Колос, 1996. – 366 с.
26. Васько, В. Т. Теоретические основы растениеводства / В. Т. Васько. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – СПб.: ПРОФИ-Информ, 2004. – 198 с.
27. Шеин, Е. В. Агрофизика / Е. В. Шеин, В. М. Гончаров. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 397 с.
28. Шеуджен, А. Х. Агрохимия / А. Х. Шеуджен, В. Т. Куркаев, Н. С. Котляров; под ред. А. Х. Шеуджена. – 2-е изд., перераб. и доп. – Майкоп: Афиша, 2006. – 1075 с.
29. О роли научных понятий в земледелии / И. Я. Пигорев, В. М. Наумкин, А. В. Наумкин [и др.] // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. – 2018. – № 1. – С. 4–10.
30. Выбор показателя водного режима в математической модели урожайности сахарной свеклы / А. П. Лихацевич, Г. В. Латушкина, А. А. Левкевич [и др.] // Мелиорация. – 2022. – № 4 (102). – С. 45–54.

References

1. Ovchinnikov A. S., Bocharnikova O. V., Pantjushina T. V., Shenceva E. V. Productivity of paprika by drip irrigation. *Melioratsiya i vodnoe khozyaistvo = Melioration and Water Management*, 2007, no. 2, pp. 45–47 (in Russian).
2. Akulinina M. A. *Drip irrigation of cucumber in the dry steppe zone of light chestnut soils of the Lower Volga region*. Volgograd, 2010. 23 p. (in Russian).

3. Shentseva E. V. *Improving agricultural technology for growing eggplants under drip irrigation using tunnel shelters to obtain early production*. Saratov, 2012. 23 p. (in Russian).
4. Bogdanenko M. P. *Technology for cultivating onion seedlings under drip irrigation in the Lower Volga region*. Saratov, 2012. 24 p. (in Russian).
5. Stepuro M. F., Panifedova L. M. Using mathematical modeling methods in assessing fertilizer systems and optimizing mineral nutrition of cabbage. *Zemlyarobstva i akhova raslin* [Agriculture and Plant Protection], 2012, no. 3, pp. 34–37 (in Russian).
6. Stepuro M. F. Application of mathematical modeling methods in assessing fertilizer systems and optimizing mineral nutrition of table carrots. *Zemlyarobstva i akhova raslin* [Agriculture and Plant Protection], 2012, no. 4, pp. 59–62 (in Russian).
7. Stepuro M. F. *Scientific justification of agricultural practices in intensive technologies for cultivating vegetable crops in the conditions of Belarus*. Zhodino, 2013. 51 p. (in Russian).
8. Dubenok N. N., Ovchinnikov A. S., Martynova A. A., Dusar' S. A. *Low-intensity sprinkling of table carrots*. Moscow, Prospekt Publ., 2022. 208 p. (in Russian).
9. Pen'kova R. I. *Resource-saving technologies for cultivating carrots under drip irrigation in the conditions of the Lower Volga region*. Volgograd, 2023. 20 p. (in Russian).
10. Vakhonin N. K. Conceptual basis for modeling yield in the decision-making system for regulating water regime. *Melioratsiya* [Land Reclamation], 2014, no. 2 (72), pp. 7–15 (in Russian).
11. Vakhonin N. K. Modeling of yields in a precision farming system. *Melioratsiya* [Land Reclamation], 2015, no. 1 (73), pp. 131–136 (in Russian).
12. Krasovskii G. I., Filaretov G. F. *Experimental planning*. Minsk, Publishing house of the Belarusian State University, 1982. 303 p. (in Russian).
13. Kane M. M. *Analysis of source data for statistical processing of scientific research results*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 2024. 118 p. (in Russian).
14. Aver'yanov S. F., Shabanov V. V. Some mathematical models of the plant-environment system. *Fizicheskoe i matematicheskoe modelirovanie v melioratsii: nauchnye trudy* [Physical and mathematical modeling in land reclamation: scientific works]. Moscow, 1973, pp. 293–295 (in Russian).
15. Afanasik G. I. Modeling the process of crop yield formation. *Melioratsiya torfyanikov i ikh sel'skokhozyaistvennoe ispol'zovanie: sbornik statei* [Reclamation of peatlands and their agricultural use: collection of articles]. Minsk, 1977, iss. 3, pp. 122–127 (in Russian).
16. Romko A. V. *Justification of the water and nutritional regime of reclaimed lands in the humid zone using an integrated agroecosystem model*. Moscow, 2007. 26 p. (in Russian).
17. Popov V. A. Mathematical expression of the law of the limiting factor and its application to the problems of reclamation agriculture. *Melioratsiya i vodnoe khozyaistvo = Melioration and Water Management*, 1997, no. 2, pp. 30–34 (in Russian).
18. Shtepa B. G., Nosenko V. F., Vinnikova N. V., Danil'chenko N. V., Ostapov I. S., Fomin G. E., Afanas'ev V. A. *Irrigation mechanization*. Moscow, Agropromizdat Publ., 1990. 336 p. (in Russian).
19. Kondakov N. I. *Logical dictionary-reference book*. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1976. 720 p. (in Russian).
20. Prokhorov Yu. V. (ed.). *Mathematical encyclopedic dictionary*. Moscow, Sovetskaya Entsiklopediya Publ., 1988. 847 p. (in Russian).
21. Kolganov A. V. (ed.). *Land reclamation encyclopedia. Vol. 2*. Moscow, Rosinformagrotekh Publ., 2004. 444 p. (in Russian).
22. Prokhorov A. M. (ed.). *Physical encyclopedic dictionary*. Moscow, Sovetskaya Entsiklopediya Publ., 1984. 944 p. (in Russian).
23. Likhatchevich A. P. The use of the physical principle for the construction of experimental mathematical models of the studied processes in reclamation science. *Melioratsiya i vodnoe khozyaistvo = Melioration and Water Management*, 2021, no. 6, pp. 30–36 (in Russian). <https://doi.org/10.32962/0235-2524-2021-6-30-36>
24. Vorob'ev S. A., Kashtanov A. N., Lykov A. M., Makarov I. P. *Agriculture*. Moscow, Agropromizdat Publ., 1991. 572 p. (in Russian).
25. Kiryushin V. I. *Ecological foundations of agriculture*. Moscow, Kolos Publ., 1996. 366 p. (in Russian).
26. Vas'ko V. T. *Theoretical foundations of crop production*. 2nd ed. St. Petersburg, PROFI-Inform Publ., 2004. 198 p. (in Russian).
27. Shein E. V., Goncharov V. M. *Agrophysics*. Rostov-on-Don, Feniks Publ. 2006. 397 p. (in Russian).
28. Sheudzhen A. Kh., Kurkaev V. T., Kotlyarov N. S. *Agrochemistry*. 2nd ed. Maykop, Afisha Publ., 2006. 1075 p. (in Russian).
29. Pigorev I. Y., Naumkin V. N., Naumkin A. V., Khlopyannikov A. M., Khlopyannikova G. V. About role of scientific concepts in agriculture. *Vestnik Kurskoi gosudarstvennoi sel'skokhozyaistvennoi akademii* [Bulletin of the Kursk State Agricultural Academy], 2018, no. 1, pp. 4–10 (in Russian).
30. Likhatchevich A. P., Latushkina G. V., Levkevich A. A., Malyshko A. V., Titova M. N. Selection of the water regime indicator in the mathematical model of sugar beet yield. *Melioratsiya* [Land Reclamation], 2022, no. 4 (102), pp. 45–54 (in Russian).

Информация об авторах

Лихацевич Анатолий Павлович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт мелиорации, Национальная академия наук Беларуси (ул. Некрасова, 39–2, 200040, Минск, Республика Беларусь). [http:// orcid.org/0000-0003-1154-9843](http://orcid.org/0000-0003-1154-9843). E-mail: alikhatchevich@mail.ru

Мальшко Анатолий Вячеславович – заведующий отделом минерального питания, Опытная научная станция по сахарной свекле (ул. Озерная, 1, 222603, Несвиж, Минская область, Республика Беларусь). E-mail: malyschko@mail.ru

Романов Илья Александрович – кандидат технических наук, заведующий кафедрой сельского строительства и обустройства территорий, Белорусская государственная сельскохозяйственная академия (ул. Мичурина, 5, 213410, Горки, Могилевская обл., Республика Беларусь). E-mail: ilya.ramanau@gmail.com

Набздоров Сергей Васильевич – кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры мелиорации и водного хозяйства, Белорусская государственная сельскохозяйственная академия (ул. Мичурина, 5, 213410, Горки, Могилевская обл., Республика Беларусь). E-mail: Nabzdorov@mail.ru

Information about the authors

Anatoly P. Likhatchevich – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Engineering), Professor, Chief Researcher, Institute of Land Reclamation, National Academy of Sciences of Belarus (39–2, Nekrasova Str., 200040, Minsk, Republic of Belarus). [https:// orcid.org/0000-0003-1154-9843](https://orcid.org/0000-0003-1154-9843). E-mail: alikhatchevich@mail.ru.

Anatoly V. Malyschko – Head of the Department of Mineral Nutrition, Experimental Scientific Station for Sugar Beet (1, Ozernaya Str., 222603, Nesvizh, Minsk Region, Republic of Belarus). E-mail: malyschko@mail.ru

Ilya A. Romanov – Ph. D. (Engineering), Head of the Department of Rural Construction and Land Improvement, Belarusian State Agricultural Academy (5, Michurin Str., 213410, Gorki, Mogilev Region, Republic of Belarus). E-mail: ilya.ramanau@gmail.com

Sergey V. Nabzdorov – Ph. D. (Agriculture), Associate Professor of the Department of Land Reclamation and Water Management, Belarusian State Agricultural Academy (5, Michurin Str., 213410, Gorki, Mogilev Region, Republic of Belarus). E-mail: Nabzdorov@mail.ru